Variation Diminishing Splineによる多変数関数近似 (計算の手間と能率化)

馬渡, 鎮夫

数理解析研究所講究録
215巻 1974年 26-46

Variation Diminishing Spline による多変数関数近似

青山学院大　理工　馬渡鎮夫

§1.　はじめに

多変数関数を各変数に関する近似式の何らかの積によって近似する場合，計算量を実際上実行可能な範囲内までに減らすよう工夫しなければならない。この問題解決への試みには確率論的な方法（[6]，[7]，[11]，[12]）と決定論的な方法があるけれども，可能なかぎり後者を採用する方が望ましいことは明らかである。上の問題解決への決定論的試みは，今までのところ，分配束における恒等写像の *maximal decomposition* による方法（[5]）と *Quasiinterpolant* による方法（[10]）の2つによって代表されるように思われる。これらは近似論の種々の箇所で局部的に活用可能であるという意味で理論的には重要であるが，現在のまゝの形では，ごく低次元（たとえば3次元以下）かまたは特殊な場合にしかその偉力を発揮しない。

本論で述べる variation diminishing spline による近似法は，下に述べるような意味で，上記の問題解決に関する従来の決定論的試みを一歩進めたものである。

(i) 関数値の近似については，任意に与えられた点での近似計算に必要な data point の数は，step size の大きさにかかわらず，高々 2^ν 個（ν は変数の数）である。

(ii) 関数値，第1階偏導関数値，---，第 $k-2$ 階偏導関数値（$k \geqq 4$ かつ偶数）までを同時に近似する式の任意に与えられた点での計算については，step size の大きさにかゝわらず，高々 k^ν 個の data point が必要である。

(iii) 等間隔の場合の誤差は，step size h の2乗の order $O(h^2)$ である。

§2. General Remarks

$I = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ は ν 次元の Cube とし，I の上で定義された実数値連続関数の全体より成る normed space を $C(I)$，その subspace を F，F の有限次元部分空間を S，その basis を $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d}$，F 上の bounded linear functional を $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d}$ として，任意の $f \in F$ を

$$L(f) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(f)\varphi_i \tag{2.1}$$

によって近似するものとする。

このとき，計算量を少なくする問題に関して，$L(f)$が満たしてほしい条件として次のものがあげられる。

(I)　$\|f-L(f)\|$が小さい。

(II)　I上で必要とされる関数値，導関数値の総数は少ない。

(III)　(2.1)の右辺の数値計算は容易である。

(IV)　各λ_i，φ_iは小さいsupport $\mathrm{Supp}(\lambda_i)$，$\mathrm{Supp}(\varphi_i)$を持ち，各$\mathrm{Supp}(\lambda_i)$は有限集合であって，

$$\mathrm{Supp}(\lambda_i) \subset \mathrm{Supp}(\varphi_i) \quad \text{for } i=1,2,\cdots,d.$$

(V)　次の関係式が成り立つ。

$$\lambda_i(\varphi_j) = \delta_{ij} \qquad \text{for } i,j=1,2,\cdots,d.$$

(I)，(II)，(III)の条件は明白である。(IV)が満たされると与えられた点xをsupportに含まないφ_iについては計算する必要がないので，それだけ計算量が減る。(V)が満たされると，(2.1)のLはidempotentとなり，精度が高まり誤差解析は容易となる。これらの条件のうち，できるだけ多くが満たされるように$\{\lambda_i\}_{i=1}^{d}$，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{d}$を定めたい。この要求をある程度満たすものとして，C. de Boor and G.J. Fix [10]のQuasiinterpolantがある。しかし，この方法は一般には各$\lambda_i(f)$の計算に各種の偏導関数値を必要とし，ごく低次元の場合（たとえば3次元以下）を除いて，実際に使う近

似式としてはあまり得策ではない.

上記の(I)～(V)をすべて満たす近似式は外に見あたらず，しかも作成が困難なので，こゝでは(V)を無視し，残りの4つの条件を満たす近似法について述べる。そのために必要な概念や基本的な関係式を，§3，§4に前もって述べる。

§3. Variation Diminishing Operator

$x_1, x_2, \cdots, x_r$は任意の実数列とし，その符号変化の数を$v(x_i)_{i=1}^{r}$と書くことにする。この際0なるx_iは無視する.

$$0 \leqq x_1 < \cdots < x_r \leqq 1 \qquad (r\text{は任意の自然数})$$

なる分割$\pi_r=(x_i)_{i=1}^{r}$の全体をΔとし，任意の$f\in C[0,1]$の$[0,1]$における符号変化の数$v(f)$を次の式によって定義する.

$$(3.1) \qquad v(f) = \sup_{\pi_r \in \Delta} v(f(x_i))_{i=1}^{r}$$

定義2.1 ([1])

$C[0,1]$から自分自身へのoperator Lが次の3つの性質を持つとき，これをvariation diminishing operatorという。

(i) Lは$C[0,1]$においてlinearである.

(ii) $L(1)=1$, $L(x)=x$.

(iii) $v(L(f)) \leqq v(f)$ for all $f\in C[0,1]$.

Lがvariation diminishing operatorであるとき，任

意の直線 $y=a+bx$ と任意の $f\in C[0,1]$ に対して，

(3.2) $$v(L(f)(x)-a-bx)\leqq v(f(x)-a-bx).$$

すなわち，このLは直線との交差回数が増加しないような近似法である。このことから，Lは単調性を保存する。またLは全変動をも減少させるが，2次関数は再生しない。

定理2.1（[1]）

variation diminishing operator Lの中で，$L(x^2)=x^2$ となるものは恒等写像に限る。

定理2.2（[1]）

(i) 関数 $\varphi(r)=v(f(x)-r)$ $(-\infty<r<\infty)$ は，$f\in C[0,1]$ が有界変動である場合に限って可積分である。

(ii) このとき，fの全変動をT(f)とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}v(f(x)-r)\,dr=T(f).$$

(iii) Lがvariation diminishing operatorならば，

$$T(L(f))\leqq T(f).$$

§4. normalized B-spline

kは自然数，開区間 $J=(a,b)$（有限または無限）の分割 $\pi=(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ が次の条件をすべて満たすとき，これを k-extended partitionという。

(i) $x_i \leqq x_{i+1}$ *for all* i ,

(ii) $\lim_{i \to -\infty} x_i = a$, $\lim_{i \to \infty} x_i = b$,

(iii) $d_i = \overline{\{j\,;\,x_j = x_i\}}$ とすれば, $d_i \leqq k$ *for all* i .

$J=(a,b)$ の k-*extended partition* π に関し,次の条件をすべて満たす J 上の実数値関数の *linear space* を $C_\pi^{(k-1)}$ と記す。

(i) $f \in C^{k-1}(x_i, x_{i+1})$ *for all* i *such that* $(x_i, x_{i+1}) \neq \emptyset$.

(ii) すべての i と $r<k$ に対して,有限な $f^{(r)}(x_i-)$ および $f^{(r)}(x_i+)$ が存在する。

(iii) すべての i と $r<k-d_i$ に対して, $f^{(r)}(x_i+) = f^{(r)}(x_i-)$.

π 上の *order* k (すなわち *degree* $<k$) の多項式 *spline* の全体より成る *linear space* を S_π^k とすると, S_π^k は $C_\pi^{(k-1)}$ の *linear subspace* である。

$$(4.1) \qquad g_k(s\,;x) = (s-x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s-x)^{k-1} & \text{if } s \geqq x , \\ 0 & \text{if } s < x . \end{cases}$$

$$(4.2) \qquad N_{i,k}(x) = (x_{i+k}-x_i)\, g_k(x_i, \cdots, x_{i+k}\,;x) \quad \textit{for all } i$$

とおくとき,各 $N_{i,k}(x)$ を *normalized B-spline* という。定義より,すべての i に対して

$$(4.3) \qquad N_{i,k}(x) \begin{cases} =0 & \text{if } x \notin [x_i, x_{i+k}] , \\ >0 & \text{if } x \in (x_i, x_{i+k}) . \end{cases}$$

H.B. *Curry* and I.J. *Schoenberg* [2] より,任意の

$f \in S_{\tau}^{k}$ に対して，一意的な実数列 $(a_i(f))_{i=-\infty}^{\infty}$ が存在して

(4.4) $$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i(f) N_{i,k}(x)$$

C, de Boor and G. J. Fix [10] より，任意の実数 z に対して，次の関係式が成り立つ。任意の $x \in J$ に対して

(4.5) $$(x-z)^{k-1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_{i+1}-z)(x_{i+2}-z)\cdots(x_{i+k-1}-z) N_{i,k}(x).$$

両辺を z について展開し，z の係数を比較して次式を得る。

(4.6) $$\sum_i N_{i,k}(x) = 1 ,$$

(4.7) $$\sum_i \xi_{i,k} N_{i,k}(x) = x ,$$

(4.8) $$\sum_i \xi_{i,k}^{(2)} N_{i,k}(x) = x^2 .$$

ただし，すべての i に対して，$\xi_{i,k}$ ，$\xi_{i,k}^{(2)}$ は次の式によって定義する。

(4.9) $$\xi_{i,k} = \frac{1}{k-1}(x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{i+k-1}) .$$

(4.10) $$\xi_{i,k}^{(2)} = \frac{1}{\binom{k-1}{2}} \sum_{i+1 \le r < s \le i+k-1} x_r x_s .$$

§5. Variation Diminishing Spline

kは§4のそれと同じ自然数，nは任意の自然数とし，

$$(5.1)\quad \begin{cases} x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0 \\ x_k = \frac{1}{n} \\ \quad\vdots \\ x_{n+k-2} = \frac{n-1}{n} \\ x_{n+k-1} = x_{n+k} = \cdots = x_{n+2k-2} = 1 \end{cases}$$

とすると，$x_0, x_1, \cdots, x_{n+2k-2}$ は $I_1 = [0,1]$ 上の k-extended partition である。$l = n+k-2$ とすると，$i=0, 1, \cdots, l$ に対し，I_1上で§4の関係式(4.3)，(4.6)，(4.7)，(4.8) がすべて成り立つ。任意の$f \in C(I_1)$に対して

$$(5.2)\qquad L(f) = \sum_{j=0}^{l} f(\xi_{j,k}) N_{j,k}(x)$$

とおく。S. Karlin [4]より，

$$(5.3)\qquad v(L(f)) \leqq v(f(\xi_{j,k}))_{j=0}^{l} \leqq v(f).$$

従って，(5.2)のLは§3の意味でvariation diminishing operatorである。(5.2)の右辺をvariation diminishing splineという。

$x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$のとき，$N_{j-k+1,k}(x)$，$N_{j-k+2,k}(x), \cdots, N_{j,k}(x)$を除いたすべての$N_{j,k}(x)$は0である。つまり，高さ$k$個の

$N_{j,k}(x)$ の十分 0 ではない。

$k-1 \leqq j \leqq n$ のとき，$\xi_{j,k} = x_j + \frac{k}{2n}$ であり，k が偶数のとき，$\xi_{j,k}$ はどれかの x_i と一致して好都合であるから，以後本節では常に k は偶数であると仮定する．

定理 2.1 より，(5.2) は x^2 を再生しない。そこで，

$$(5.4) \qquad E_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \xi_{j,k}^2 N_{j,k}(x) - x^2$$

とおくと，M. Marsden and I. J. Schoenberg [3] より，$k \leqq n+2$ のとき次の誤差評価式を得る．

$$(5.5) \qquad 0 \leqq E_{n,k}(x) \leqq \max\{3, k\}/(12n^2).$$

これを利用して次の定理を得る。

定理 5.1

$2 \leqq k \leqq n+2$，$k_p = \max\{3, k-p\}$ とする．

(i) 任意の $f \in C(I_1)$，$x \in [0,1]$ に対し，

$$(5.6) \qquad |f(x) - L(f)(x)| \leqq \left(1+\sqrt{\tfrac{k_0}{12}}\right) \omega(f : \tfrac{1}{n}).$$

(ii) 任意の $p = 1, 2, \cdots, k-2$，$f \in C^{p+2}(I_1)$，$x \in [\frac{k-2}{n}, 1-\frac{k-2}{n}]$ に対し，

$$(5.7) \qquad |D^p f(x) - D^p L(f)(x)| \leqq \left(1+\sqrt{\tfrac{k_p}{12}}\right) \omega(D^p f : \tfrac{1}{n}) + K_p \|f^{(p+2)}\|_\infty / n^2.$$

ただし，$\omega(D^p f : \frac{1}{n})$ は $D^p f$ の modulus of continuity で，

$$K_p = \left(\sum_{m=0}^{p} {}_pC_m \left|\frac{p}{2} - m\right|^{p+2}\right) \Big/ (p+2)!\ .$$

証明

(i)の場合は，〔3〕による．先ず，次の不等式が成り立つ．

$$|f(x) - L(f)(x)| \leqq \sum_{j=0}^{l} |f(x) - f(\xi_{j,k})|\ N_{j,k}(x).$$

ところが，不等式 $w(f;\lambda\delta) \leqq (\lambda+1)w(f;\delta)$ $(\lambda, \delta > 0)$ において，$\lambda = |\xi_{j,k} - x|/\delta$ とおくと，

$$|f(x) - f(\xi_{j,k})| \leqq w(f;|x-\xi_{j,k}|) \leqq (|x-\xi_{j,k}|/\delta + 1)\, w(f:\delta),$$

$$|f(x) - L(f)(x)| \leqq w(f:\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{j=0}^{l}|x-\xi_{j,k}|\,N_{j,k}(x) + 1\right\}.$$

一方，Cauchy-Schwarz の不等式と(4.7)より，

$$\left(\sum_{j=0}^{l}|x-\xi_{j,k}|\,N_{j,k}(x)\right)^2 \leqq \sum_{j=0}^{l}(x-\xi_{j,k})^2 N_{j,k}(x) = E_{n,k}(x)$$

$$\therefore\quad |f(x) - L(f)(x)| \leqq w(f:\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sqrt{E_{n,k}(x)} + 1\right\}.$$

$\delta = \frac{1}{n}$ とおくと，(5.5)より，任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$|f(x) - L(f)(x)| \leqq w\left(f:\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{\frac{k}{12}} + 1\right\}.$$

次に，(ii)の場合を考える．$h = \frac{1}{n}$ とし，

$$A_i^{(0)} = f(\xi_{i,k}) \qquad (i = 0, 1, \cdots, l),$$

(5.8) $\quad A_i^{(p)} = (k-p)(A_i^{(p-1)} - A_{i-1}^{(p-1)})/(x_{i+k-p} - x_i)$ if $i \geqq p$

とおくと，

(5.9) $\quad D^p L(f)(x) = \sum_{j=p}^{\ell} A_j^{(p)} N_{j,k-p}(x).$

ここで，$k+p-2 \leqq j \leqq n$ の場合には，

$$A_j^{(p)} = \frac{1}{h^p} \sum_{m=0}^{p} {}_pC_m (-1)^m A_{j-m}^{(0)} ,$$

$$\frac{1}{p+1} (\xi_{j,k} + \xi_{j-1,k} + \cdots + \xi_{j-p,k}) = \xi_{j,k-p} .$$

点 $\xi_{j,k-p}$ においてfを Taylor 展開すると

$$\xi_{j-m,k} - \xi_{j,k-p} = \left(\frac{p}{2} - m\right) h \text{ if } k+p-2 \leqq j \leqq n .$$

$$f(\xi_{j-m,k}) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{1}{i!} \left\{\left(\frac{p}{2} - m\right) h\right\}^i f^{(i)}(\xi_{j,k-p})$$

$$+ \frac{1}{(p+2)!} \left\{\left(\frac{p}{2} - m\right) h\right\}^{p+2} f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

ここで，$\eta_{j,k-p}^{(m)}$ は $\xi_{j-m,k}$ と $\xi_{j,k-p}$ の中間にある実数である。

$$\sum_{m=0}^{p} {}_pC_m (-1)^m A_{j-m}^{(0)} = \sum_{m=0}^{p} {}_pC_m (-1)^m f(\xi_{j-m,k})$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(\xi_{j,k-p}) \left\{ \sum_{m=0}^{p} {}_pC_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^i \right\}$$

$$+\frac{h^{p+2}}{(p+2)!}\sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^{p+2}f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

このとき，次の関係式が成り立つ。

$$(5.10)\qquad \sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i=\begin{cases} p! & \text{if } i=p,\\ 0 & \text{if } i<p.\end{cases}$$

これをpに関する数学的帰納法によって示す．まず，$p=1$のときは明らかに成り立つ。(5.10)が$p\leqq q$に対して成り立ったと仮定すると，

$$\sum_{m=0}^{q+1}{}_{q+1}C_m(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i$$

$$=\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i+\sum_{m=1}^{q+1}{}_qC_{m-1}(-1)^m\left(\frac{q+1}{2}-m\right)^i$$

$$=\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)+\frac{1}{2}\right\}^i-\sum_{m=0}^{q}{}_qC_m(-1)^m\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)-\frac{1}{2}\right\}^i.$$

これは$i\leqq q$のとき0である。$i=q+1$のときは，最後の式において，

$$\left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)+\frac{1}{2}\right\}^i,\quad \left\{\left(\frac{q}{2}-m\right)-\frac{1}{2}\right\}^i$$

を展開して$(q+1)!$を得る。故に，(5.10)が成り立つ。

また，(5.10)の左辺は次のようにも書ける。

$$(5.11)\qquad \sum_{m=0}^{p}{}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i=\{1+(-1)^{p+i}\}\sum_{m=0}^{[\frac{p}{2}]}{}_pC_m\left(\frac{p}{2}-m\right)^i.$$

従って，$i=p+1$ のとき，(5.11) は0となる．

以上より，$k+p-2 \leqq j \leqq n$ のとき，

$$(5.12) \qquad A_j^{(p)} = f^{(p)}(\xi_{j,k-p}) + \frac{h^2}{(p+2)!}\sum_{m=0}^{p} {}_pC_m(-1)^m\left(\frac{p}{2}-m\right)^{p+2} f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

一方，$x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$ とすると，(5.9) において

$N_{j-(k-p)+1,k-p}(x), N_{j-(k-p)+2,k-p}(x), \cdots, N_{j,k-p}(x)$

のみが恒等的に0ではない．このことと，

$$j-(k-p)+1 \geqq k+p-2 \Longrightarrow j \geqq (k-2)+(k-1),$$

$$n+1 = n-(k-2)+(k-1)$$

に注意すると，

$$\frac{k-2}{n} \leqq x \leqq 1-\frac{k-2}{n}$$

のとき，(5.9) の各 $A_j^{(p)}$ は (5.12) であらわされるとして一般性を失わない．故に，$p=0$ の場合と同様の推論をして (5.7) を得る．

Q.E.D.

$p=1,2,\cdots,k-2$ のとき，$D^pL(f)(x)$ の実際の計算は (5.9) よりも次の計算の方が良い．

$$(5.13) \qquad D^pL(f)(x) = \sum_{j=0}^{l} f(\xi_{j,k})D^pN_{j,k}(x).$$

各 $D^pN_{j,k}(x)$ の計算は，C. de Boor [8] の方法を使えば安定である．従って，*variation diminishing spline* は，

関数値，導関数値，高階導関数値の計算に利用できる．

なお，(5.2) の L は *positive linear operator* でもある．従って，次の定理を得る．

定理5．2

$2 \leqq k \leqq n+2$ とすると，

(i) 任意の $f \in C^2(I_1)$，$x \in [0,1]$ に対して，

(5.14) $$|f(x) - L(f)(x)| \leqq 2(k-1)\|f''\|_\infty / n^2 .$$

(ii) 任意の $p = 1,2,\cdots,k-2$，$f \in C^{p+2}(I_1)$，$x \in [\frac{k-2}{n}, 1-\frac{k-2}{n}]$ に対し，定理5.1の K_p により，

(5.15) $$|D^p f(x) - D^p L(f)(x)| \leqq (2k-2+K_p)\|f^{(p+2)}\|_\infty / n^2 .$$

証明

$$\alpha_{n,k}^2 = \frac{k-1}{n^2}$$

とおくと，R.A. Devore [9] より，

$$|f(x) - L(f)(x)| \leqq 2\alpha_{n,k}\, \omega(f'; \alpha_{n,k}) .$$

$$\therefore |f(x) - L(f)(x)| \leqq 2(k-1)\|f''\|_\infty / n^2 .$$

$p = 1,2,\cdots,k-2$ のときは，(5.12) と $p=0$ の場合と同様の推論により (5.15) を得る．

Q. E. D.

§6. *Variation Diminishing Spline* による多変数

関数近似

$I=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ は ν 次元 Cube とし，各変数について§5で述べた *variation diminishing spline* を作り，これらの *tensor product* をとって，I 上で k 回連続的に微分可能な実数値関数 $f\in C^k(I)$ の近似式を作る．

$$(6.1)\qquad L(f)(y)=\sum_{j_1=0}^{l_1}\sum_{j_2=0}^{l_2}\cdots\sum_{j_\nu=0}^{l_\nu} f(\xi_{j_1,k},\xi_{j_2,k},\cdots,\xi_{j_\nu,k})N_{j_1,k}(y_1)\cdots N_{j_\nu,k}(y_\nu).$$

右辺は *step size* の大きさにかかわらず，高々 k^ν 個のみが 0 ではなく，$k\geqq 3$ のとき $k-2$ 回連続的に微分可能である．従って，関数値のみが必要なときは $k=2$ とすると，任意に与えられた点での計算に関し，高々 2^ν 個の *data point* が必要である．また，各変数について $k-2$ 階の偏導関数まで近似したいときは，$k\geqq 4$ かつ偶数として，任意に与えられた点での計算に関し，高々 k^ν 個の *data point* が必要である。

(6.1)の誤差評価式として，(5.6)，(5.14)に対応するものがそれぞれ作られるが，ここでは後者のみを述べる。

第 i 変数に関する(5.2)の L を L_i，$C^k(I)$ 上の恒等写像を E とし，$R_i=E-L_i$ とおくと，$C^k(I)$ 上の一様 *norm* に関し，

$$(6.2)\qquad \begin{aligned} &\|L_i\|=1 \quad \text{for } i=1,2,\cdots,\nu. \\ &\|R_i(f)\|_\infty\leqq 2(k-1)\|D_i^2 f\|_\infty/n^2 \end{aligned}$$

定理6.1

任意の $p=0,1,\cdots,k-2$，$f\in C^{p+2}(I)$ に対して，

$$(6.3)\qquad |D_\nu^p f(y)-D_\nu^p L(f)(y)| \leqq \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=1}^{\nu}(2k-2+\overline{K}_\alpha)\|D_\alpha^2 D_\nu^p f\|_\infty + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

ただし，$p=0$ ならば $y\in I$，$p\geqq 1$ ならば $y\in[\frac{k-2}{n},1-\frac{k-2}{n}]\times\cdots\times[\frac{k-2}{n},1-\frac{k-2}{n}]$ $(\subset I)$ であり，$\overline{K}_\nu=K_p$，他は $\overline{K}_\alpha=K_0$．

証明

$$(6.4)\quad E=\prod_{\nu=1}^{\nu}L_\nu+\sum_{\alpha=1}^{\nu}R_\alpha\prod_{\nu=1,\neq\alpha}L_\nu+\sum_{1\leqq\alpha<\beta\leqq\nu}R_\alpha R_\beta\prod_{\nu=1,\neq\alpha,\beta}L_\nu+\cdots+\prod_{\nu=1}^{\nu}R_\nu .$$

$$L=\prod_{\nu=1}^{\nu}L_\nu$$

$$\|R_\alpha R_\beta f\|_\infty \leqq (2k-2)\|D_\alpha^2 R_\beta f\|_\infty/n^2 \leqq (2k-2)^2\|D_\beta^2(D_\alpha^2 f)\|_\infty/n^4 .$$

(6.4) を第 ν 変数について偏微分すると，右辺において添字が ν であるものに D_ν^p がつく。これらのことと，(6.2)，(5.12) より，(6.3) が従う。

Q．E．D．

(6.1) の $L(f)$ が (3.2) のような *shape-preserving* な性質を持つかどうかは明らかではないが，少なくとも次の意味での単調性は保存する．

定理6．2

$f\in C^1(I)$ が各変数について単調ならば，$L(f)$ も同じ意味で単調である。

証明

変数 y_ν について示す．他の変数についても同様である．

$f(\xi_{j_1,k}, \xi_{j_2,k}, \cdots, \xi_{j_\nu,k})$ を単に $f(j_1, j_2, \cdots, j_\nu)$ と書くと，

$$D_\nu L(f)(y) = \sum_{j_1=0}^{l_1}\sum_{j_2=0}^{l_2}\cdots\sum_{j_\nu=1}^{l_\nu} g(j_1, j_2, \cdots, j_\nu) N_{j_1,k}(y_1) N_{j_2,k}(y_2)\cdots N_{j_\nu,k}(y_\nu).$$

ただし，

$$g(j_1, j_2, \cdots, j_\nu) = \frac{k-1}{x_{j_\nu+k-1} - x_{j_\nu}}\left\{f(j_1, \cdots, j_{\nu-1}, j_\nu) - f(j_1, \cdots, j_{\nu-1}, j_\nu - 1)\right\}.$$

ところが，

$$g(j_1, j_2, \cdots, j_\nu) = \frac{(k-1)(\xi_{j_\nu,k} - \xi_{j_\nu-1,k})}{(x_{j_\nu+k-1} - x_{j_\nu})} \cdot D_\nu f(j_1, \cdots, j_{\nu-1}, y_\nu),$$

$$y_\nu \in [\xi_{j_\nu-1,k}, \xi_{j,k}].$$

仮定より，$g(j_1, \cdots, j_\nu) \geqq 0$ が成り立つから，

$$D_\nu L(f)(y) \geqq 0.$$

Q.E.D.

§7. 数値実験

近似式 (5.2)，(6.1) について実際に計算した。両者の計算において，$n = 32$ すなわち *step size* を $h = 2^{-5}$ としたので，誤差は $h^2 = 2^{-10}$ の *order* つまり有効3桁ある筈である。結果は次のとおり良好である。こゝで，$k = 4$ であり使用機

種はTOSBAC 3400である。

[実験1]

(7.1) 被近似関数; $f(x)=e^x$ $(0\leqq x\leqq 1)$.

出力点; $x_i=(3i-0.5)h$ $(i=1,2,\cdots,8)$

目 的; $f(x_i), f'(x_i), f''(x_i), f'''(x_i)$ がすべて h^2 のorderで近似できるかどうか調べる。

結 果;

i	真 値	$L(f)(x_i)$ の値	$DL(f)(x_i)$ の値	$D^2L(f)(x_i)$ の値	$D^3L(f)(x_i)$ の値
1	1.081 2578	1.081 4338	1.081 4338	1.081 4778	1.081 3913
2	1.187 5294	1.187 7227	1.187 7227	1.187 7710	1.187 6736
3	1.304 2459	1.304 4582	1.304 4582	1.304 5112	1.304 4052
4	1.432 4339	1.432 6670	1.432 6670	1.432 7253	1.432 6096
5	1.573 2208	1.573 4769	1.573 4769	1.573 5409	1.573 4124
6	1.727 8451	1.728 1263	1.728 1263	1.728 1966	1.728 0593
7	1.897 6666	1.897 9754	1.897 9754	1.898 0526	1.897 8977
8	2.084 1790	2.084 5182	2.084 5182	2.084 6030	2.084 4354

注 意; (1) 上の結果は, 実際に計算して得られたもののごく一部で, 残りの計算値も定理5.1の仮定を満たすかぎり同じ有効桁数を持つ.

(2) 上の結果および定理5.1の証明より, $D^3L(f)$ が定義される点 x での精度は他と同じである。

〔実験２〕

(7.2)　被近似関数；$f(y_1,\cdots,y_\nu)=(1+y_1+\cdots+y_\nu+y_1\cdots\cdots y_\nu)^4$

出力点；$\bar{y}=(0.484375,\cdots,0.484375)$

目　的；$\nu=1,2,\cdots,10$ としたとき，~~誤差が~~ h^2 の order であるかどうか，また，どのくらいの時間が必要であるかを調べる。

結　果；

ν	真　値	$L(f)(\bar{y})$ の計算値	所要時間
1	$0.1502\ 3192\times10^2$	$0.1505\ 3480\times10^2$	計48分43秒(*)
2	$0.2356\ 9428\times10^2$	$0.2361\ 1235\times10^2$	
3	$0.4340\ 5714\times10^2$	$0.4346\ 4580\times10^2$	
4	$0.8019\ 7979\times10^2$	$0.8028\ 4770\times10^2$	計 2分 1秒
5	$0.1414\ 2951\times10^3$	$0.1415\ 5881\times10^3$	
6	$0.2359\ 2509\times10^3$	$0.2361\ 1484\times10^3$	計50分56秒
7	$0.3737\ 4785\times10^3$	$0.3740\ 1904\times10^3$	
8	$0.5662\ 1047\times10^3$	$0.5665\ 8686\times10^3$	
9	$0.8259\ 0911\times10^3$	$0.8264\ 1699\times10^3$	
10	$0.1166\ 7501\times10^4$	$0.1167\ 4163\times10^4$	

注　意；(*) の時間が不合理であることの原因は，プログラムの拙さによる。少しの工夫で，これはもっと少なくできるであろう。

§8. おわりに

以上より variation diminishing spline による多変数関数近似の有効な点が判明した。$2^{20}=4^{10}\fallingdotseq 10^6$ であり，10^6 個の data point についての逆算計算は，§7，[実験2] でみたとおり，現在の中型計算機でも大して困難ではないので，(6.1) は，関数値に関しては少なくとも 20 次元まで ($k=2$)，第1および第2階偏導関数値に関しては少なくとも 10 次元まで ($k=4$)，それらの近似式として十分実用に耐えられる。

次元数がもっと大きいとき（たとえば $\nu\geqq 21$ のとき），上のような tensor product 法による近似式で計算量を決定論的に減らすことは非常に困難である。あくまで決定論的立場に留まるならば，tensor product 法ではない何か新しい近似法を考え出す必要があると思われる。これらは今後に残された大きな課題である。

最後に，本論をまとめるにあたって，一松信先生をはじめ数理解析研究所の多くの方々に御援助をいただいた。心から感謝致します。

参 考 文 献

[1]. I.J. Schoenberg, On variation diminishing approximation methods, In

"On Numerical Approximation" (R.E. Langer, ed) PP249—274, Univ. of Wisconsin Press, 1959.

[2]. H.B. Curry and I.J. Schoenberg, On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits. J. Analyse Math. 17 (1966), PP71—107.

[3]. M. Marsden and I.J. Schoenberg, On variation diminishing spline approximation methods, Mathematica (Cluj) 31 (1966), PP61—82.

[4]. S. Karlin, "Total Positivity" VOl.I, Stanford University Press (1968).

[5]. W.J. Gordon, Distributive lattices and the approximation of multivariate functions, "Approximation with Special Emphasis on Splines" (I.J. Schoenberg ed) PP223—277, Academic Press (1969).

[6]. T. Tsuda and K. Ichida, Nonlinear Interpolation of Multivariable Functions by the Monte Carlo Method, J.ACM VOl.17 (1970), PP420—425.

[7]. T. Tsuda, Numerical Differentation (of Functions) of Very Many Variables, Numer. Math. 18 (1972), PP327—335

[8]. C. de Boor, On Calculating with B-splines, J. Approx. Theory VOl.6 (1972), PP50—62.

[9]. R.A. DeVore, The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Lecture Notes in Mathematics VOl.293, Springer-Verlag, (1972).

[10]. C. de Boor and G.J. Fix, Spline Approximation by Quasiinterpolants, J. Approximation Theory VOl 8 (1973), PP19—45.

[11]. T. Tsuda, Numerical Integration of Functions of Very Many Variables, Numer. Math. 20 (1973), PP377—391.

[12]. 市田浩三・清野武，多変数関数の補間について，情報処理 VOl.14 (1973), PP114—117.